PLAN WYNIKOWY

(zakres podstawowy)

klasa 2.

Wstęp

Plan wynikowy kształcenia matematycznego jest dostosowany do programu nauczania matematyki w liceach i technikach, autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab oraz Elżbiety Świdy: zakres podstawowy – numer dopuszczenia DKOS – 5002 – 05/08. Jest on przeznaczony dla nauczycieli oraz uczniów pracujących z podręcznikiem „Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Zakres podstawowy" i zbiorami zadań do matematyki, autorstwa Elżbiety Kurczab, Marcina Kurczaba oraz Elżbiety Świdy, wydanymi przez Oficynę Edukacyjną * Krzysztof Pazdro.

Plan jest wykazem wiadomości i umiejętności, jakie powinien mieć uczeń ubiegający się o określone oceny na poszczególnych etapach edukacji w liceum lub w technikum.

Wymagania stawiane przed uczniem podzieliliśmy na trzy grupy:
- Wymagania podstawowe (zawierają wymagania konieczne);
- Wymagania dopełniające (zawierają wymagania rozszerzające);
- Wymagania wykraczające.

Wymagania wykraczające zawierają w sobie wymagania dopełniające, te zaś zawierają wymagania podstawowe.

<u>Ocenę dopuszczającą</u> powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 40% – 60% wymagań podstawowych, zaś <u>ocenę dostateczną</u> uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 60 % wymagań podstawowych.

<u>Ocenę dobrą</u> powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące do 75% wymagań dopełniających, zaś <u>ocenę bardzo dobrą</u> uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 75% wymagań dopełniających.

<u>Ocenę celującą</u> powinien uzyskać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności zawarte w wymaganiach wykraczających.

1. Funkcja liniowa

Tematyka zajęć:

- Proporcjonalność prosta.
- Definicja funkcji liniowej. Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej.
- Własności funkcji liniowej.
- Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych.
- Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego.
- Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi.
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Zastosowanie układów równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych.
- Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Układy nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie i wykres proporcjonalności prostej – zna pojęcie funkcji liniowej; – potrafi interpretować współczynniki we wzorze funkcji liniowej; – zna zależność pomiędzy miejscami zerowym funkcji liniowych a współczynnikami we wzorach tych funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie punkty	Uczeń: – potrafi narysować wykres funkcji kawałkami liniowej i na jego podstawie omówić jej własności; – potrafi wyznaczyć algebraicznie miejsca zerowe funkcji kawałkami liniowej oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś *OY*; – potrafi wyznaczyć algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja kawałkami	Uczeń: – rozwiązuje zadania nietypowe, o podwyższonym stopniu trudności, w tym zadania z parametrem.

przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu; – potrafi sporządzić wykres funkcji liniowej danej wzorem; – potrafi na podstawie wykresu funkcji liniowej (wzoru funkcji) określić monotoniczność funkcji; potrafi wyznaczyć algebraicznie i graficznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja liniowa osiąga wartości dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne); – potrafi sprawdzić algebraicznie czy punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej; – potrafi znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach (np. takiej, której wykres przechodzi przez dwa dane punkty); – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi interpretować graficznie równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązać układ nierówności liniowych z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać algebraicznie (metodą	liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne); – potrafi obliczyć wartość funkcji kawałkami liniowej dla podanego argumentu; – potrafi opisać daną figurę geometryczną w prostokątnym układzie współrzędnych za pomocą odpowiedniego układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi narysować w prostokątnym układzie współrzędnych figurę geometryczną zapisaną za pomocą układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi wykorzystać wiedzę o funkcji liniowej w zadaniach o średnim stopniu trudności.	

podstawiania, metodą przeciwnych współ-czynników) i graficznie układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozpoznać układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny i umie podać ich interpretację geometryczną; – potrafi zbadać wzajemne położenie dwóch prostych na płaszczyźnie; – potrafi rozwiązać zadanie tekstowe prowadzące do równania liniowego z jedną niewiadomą, nierówności liniowej z jedną niewiadomą lub układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi stosować wiadomości o funkcji liniowej do opisu zjawisk z życia codziennego (podać opis matematyczny zjawiska w postaci wzoru funkcji liniowej, odczytać informacje z wykresu (wzoru), zinterpretować je, przeanalizować i przetworzyć).		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Rozważmy koła o promieniach różnej długości. Czy obwód koła jest wprost proporcjonalny do średnicy tego koła? Jeśli tak, to jaki jest współczynnik proporcjonalności? <u>Zadanie 2.</u> Napisz wzór funkcji liniowej f wiedząc, że miejscem zerowym funkcji jest liczba 2 i	<u>Zadanie 1.</u> Opisz za pomocą układu nierówności zbiór przedstawiony na rysunku.	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz funkcję liniową f, która dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ spełnia warunek: $f(2x - 1) = -6x + 4$. <u>Zadanie 2.</u> Funkcję $y = \text{sgn}\,(a)$ (co oznacza znak liczby a), definiujemy następująco:

$f(0) = 8$.

<u>Zadanie 3.</u>

Dana jest funkcja liniowa określona wzorem $y = \frac{2}{3}x + 5$. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest:

a) równoległy do wykresu danej funkcji i przechodzi przez punkt $A(-8, 4)$;

b) prostopadły do wykresu danej funkcji i przechodzi przez punkt $B(9, -2)$.

<u>Zadanie 4.</u>

W wannie o pojemności 200 litrów znajdowało się 20 litrów wody. Po odkręceniu kurków do wanny napływa 15 litrów wody w ciągu minuty.

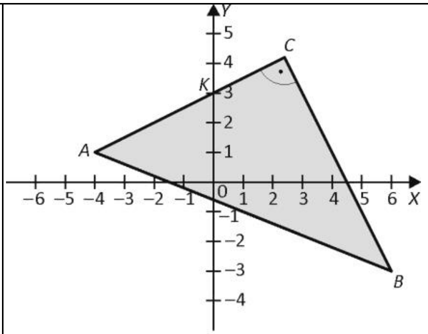
a) Po ilu minutach wanna będzie pełna?

b) Napisz wzór funkcji opisującej zależność liczby litrów wody w wannie od czasu w godzinach (liczonego od chwili odkręcenia kurków do chwili napełnienia wanny).

c) Narysuj wykres tej funkcji w prostokątnym układzie współrzędnych.

<u>Zadanie 5.</u>

Do marynowania podgrzybków potrzebny jest ocet 6%. Pani Kowalska kupiła 1 litr octu 10%. Ile wody powinna dolać do zakupionego octu, aby otrzymać ocet do marynaty o żądanym stężeniu?



dane: $A(-4, 1)$, $K(0, 3)$
$B(6, -2)$, $|\sphericalangle ACB| = 90°$

<u>Zadanie 2.</u>

Z okazji rozpoczęcia roku szkolnego do sali gimnastycznej wniesiono ławki dla wszystkich uczniów tej szkoły. Gdyby na każdej ławce usiadło 6 uczniów, to zabrakłoby dwóch ławek. Gdyby zaś na każdej ławce usiadło 8 uczniów, to zostałyby 3 ławki puste. Ilu jest uczniów w tej szkole i ile ławek wniesiono do sali gimnastycznej?

<u>Zadanie 3.</u>

Dana jest funkcja opisana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{dla } x<2 \\ x-3 & \text{dla } 2 \le x \le 8 \\ -x+10 & \text{dla } x>8 \end{cases}$$

a) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.

b) Oblicz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji przecina oś OY.

c) Narysuj wykres funkcji f i na podstawie wykresu określ:

$$\mathrm{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{dla } a>0 \\ 0 & \text{dla } a=0 \\ -1 & \text{dla } a<0 \end{cases}$$

Na podstawie powyższej definicji narysuj wykres funkcji: $f(x) = -2\mathrm{sgn}(-3x + 1) + 5$.

<u>Zadanie 3.</u>

Wyznacz liczbę rozwiązań równania: $ax + 1 = x + a^2$, w zależności od wartości parametru a.

<u>Zadanie 4.</u>

Dla jakich wartości a para liczb (x, y), spełniająca układ równań $\begin{cases} x-y=a \\ 2x+y=2a+6 \end{cases}$ spełnia również nierówność $|x| - y > 6$?

<u>Zadanie 5.</u>

Dane są funkcje liniowe: $f(x) = \frac{1}{2}ax - b$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}bx + a$, gdzie $a \neq -b$. Wykresy obu funkcji przecinają oś OX w tym samym punkcie A. Wyznacz odciętą punktu A.

Zadanie 6. Wyznacz wzór funkcji liniowej wiedząc, że funkcja przyjmuje wartość 3 dla argumentu –2 oraz $f(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (1, +\infty)$. Zadanie 7. W 1980 roku łączna emisja zanieczyszczeń pyłowych i gazowych w Polsce wynosiła 7,3 mln ton. W ciągu 12 lat emisja zanieczyszczeń pyłowych zmniejszyła się o 70%, a zanieczyszczeń gazowych o 37% tak, że w sumie masa tych zanieczyszczeń wyniosła 3,84 mln ton. Oblicz, jaka była emisja zanieczyszczeń pyłowych, a jaka gazowych w 1992 roku.	– przedziały monotoniczności funkcji – zbiór tych argumentów, dla których funkcja osiąga wartości dodatnie. Zadanie 4. Dana jest funkcja liniowa $y = (m + 10)x - m$. Wyznacz wartość parametru m, dla którego: a) wykres funkcji przechodzi przez początek układu współrzędnych; b) miejsce zerowe funkcji f jest równe 0,5; c) dana funkcja jest malejąca; d) dla argumentu 5 funkcja przyjmuje wartość 2. Zadanie 5. Pan Kowalski otrzymuje stałe wynagrodzenie miesięczne oraz dodatkowo wynagrodzenie za nadgodziny. Za każdą godzinę nadliczbową otrzymuje o 50% więcej niż za godzinę etatową. W marcu miał 20 nadgodzin i otrzymał 1800 zł, zaś w kwietniu miał 16 nadgodzin i otrzymał 1746 zł. a) Oblicz: 1) stawkę za godzinę nadliczbową 2) stawkę za godziną etatową 3) wysokość stałego wynagrodzenia miesięcznego. Napisz wzór opisujący wynagrodzenie - miesięczne pana Kowalskiego, w zależności od liczby przepracowanych nadgodzin, jeśli wiadomo, że maksymalna liczba nadgodzin w miesiącu nie może przekroczyć 30 godzin.	

2. Geometria płaska – czworokąty

Tematyka zajęć:

- Podział czworokątów. Trapezoidy
- Trapezy
- Równoległoboki
- Okrąg opisany na czworokącie
- Okrąg wpisany w czworokąt
- Wielokąty – podstawowe własności
- Podobieństwo figur. Podobieństwo czworokątów
- Pole prostokąta. Pole kwadratu
- Pole równoległoboku. Pole rombu
- Pole trapezu
- Pole czworokąta
- Pola figur podobnych
- Mapa. Skala mapy

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział czworokątów; – potrafi wyróżnić wśród trapezów: trapezy prostokątne i trapezy równoramienne; poprawnie posługuje się takimi określeniami jak: podstawa, ramię, wysokość trapezu; – wie, że suma kątów przy każdym ramieniu	Uczeń: – umie na podstawie własności czworokąta podanych w zadaniu wywnioskować, jaki to jest czworokąt; – umie udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu	Uczeń: – umie udowodnić twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące czworokątów,

trapezu jest równa 180° i umie tę własność wykorzystać w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności trapezów, w tym również z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa; – zna podstawowe własności równoległoboków i umie je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – wie, jakie własności ma romb; – zna własności prostokąta i kwadratu; – wie, co to są trapezoidy, potrafi podać przykłady takich figur; – wie, czym charakteryzuje się deltoid; – rozumie co to znaczy, że czworokąt jest wpisany w okrąg, czworokąt jest opisany na okręgu; – zna warunki jakie musi spełniać czworokąt, aby można było okrąg wpisać w czworokąt oraz aby można było okrąg opisać na czworokącie; potrafi zastosować te warunki w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi wymienić nazwy czworokątów, w które można wpisać i nazwy czworokątów na których można opisać okrąg; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych własności trapezu.	trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków; – potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie w rozwiązaniu złożonych zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie do rozwiązania zadań o średnim stopniu trudności dotyczących trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu; – potrafi uzasadnić, że suma miar kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego jest stała i wynosi 720°; – potrafi wyprowadzić wzór na pole czworokąta opisanego na okręgu w zależności od długości promienia okręgu i obwodu tego czworokąta;	czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń.

– zna i potrafi stosować wzór na liczbę przekątnych wielokąta wypukłego; – zna i potrafi stosować w zadaniach wzór na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego; – wie co to jest kąt zewnętrzny wielokąta wypukłego i ile wynosi suma miar wszystkich kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego; – wie, jaki wielokąt jest wielokątem foremnym; – zna i rozumie definicję podobieństwa; – potrafi wskazać figury podobne; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące podobieństwa czworokątów; – zna wzory na pola czworokątów takich jak: kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok oraz trapez i potrafi je stosować w prostych zadaniach, korzystając z wcześniej zdobytej wiedzy (w tym także z trygonometrii); – wie jak obliczyć pole czworokąta, jeśli dane są długości jego przekątnych i miara kąta pod jakim przecinają się te przekątne; – zna i potrafi stosować w prostych zadaniach zależność między skalą podobieństwa czworokątów a polami tych czworokątów; – potrafi rozwiązywać proste zadania z zastosowaniem skali mapy.		
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> Różnica miar kątów przeciwległych trapezu	<u>Zadanie 1.</u> Uzasadnij, że odcinek łączący środki przekątnych	<u>Zadanie 1.</u> W czworokącie wpisanym w okrąg

równoramiennego wynosi 20°. Oblicz miary kątów trapezu. <u>Zadanie 2.</u> Z kawałka materiału w kształcie trapezu prostokątnego o podstawach długości 1,2 m i 0,4 m oraz wysokości 1,5 m wycięto chorągiewkę w kształcie trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest dłuższe ramię trapezu, a jeden z wierzchołków należy do krótszego ramienia trapezu. a) Wyznacz długości odcinków, na jakie ten wierzchołek podzielił krótsze ramię trapezu. b) Oblicz długości boków chorągiewki. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01 m. <u>Zadanie 3.</u> Oblicz miary kątów czworokąta *ABCD* wpisanego w okrąg, wiedząc, że $\lvert\angle C\rvert = 4\lvert\angle A\rvert$ i $\lvert\angle B\rvert = 2\lvert\angle D\rvert$. <u>Zadanie 4.</u> Wysokości równoległoboku pozostają w stosunku 3 : 5, a jeden bok jest o 6 cm dłuższy od drugiego. a) oblicz obwód równoległoboku; b) wiedząc dodatkowo, że sinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, oblicz pole równoległoboku i długości jego wysokości.	dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw. <u>Zadanie 2.</u> W czworokącie *ABCD* połączono środki boków i otrzymano prostokąt. Czy można twierdzić, że *ABCD* jest rombem? Odpowiedź uzasadnij. <u>Zadanie 3.</u> W trapez *ABCD*, *AB* || *CD*, wpisano okrąg o środku O. Uzasadnij, że $\lvert\angle BOC\rvert = 90°$. <u>Zadanie 4.</u> Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne długości 13 cm i 8 cm przecinają się pod kątem 60°. <u>Zadanie 5.</u> Przekątne rombu mają długość 10 cm i 24 cm. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu i na tej podstawie ustal, czy kąt ostry rombu ma miarę większą od 45°, czy mniejszą. <u>Zadanie 6.</u> Na okręgu, którego długość promienia wynosi 2 cm, opisano trapez równoramienny o polu 20 cm^2. Oblicz długości boków trapezu.	prowadzimy dwusieczne dwóch przeciwległych kątów, przecinające okrąg w punktach *E*, *F*. Wykaż, że odcinek *EF* jest średnicą tego okręgu. <u>Zadanie 2</u>. Udowodnij, że w dowolnym czworokącie odcinki łączące środki przeciwległych boków dzielą się w punkcie przecięcia na połowy.

Zadanie 5. Na okręgu o promieniu 3 cm opisano trapez, którego kąty przy dłuższej podstawie mają miary 30° i 60°. Oblicz pole trapezu. Zadanie 6. Pole kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ jest o 69% większe od pola kwadratu $ABCD$. Oblicz skalę podobieństwa tych kwadratów.	Zadanie 7. Romb o boku długości 18 cm podzielono na trzy części o równych polach prostymi przechodzącymi przez wierzchołek kąta ostrego. Oblicz długości odcinków, na jakie te proste podzieliły boki rombu.	

3. Funkcja kwadratowa

Tematyka zajęć:

- Jednomian stopnia drugiego
- Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej w wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej
- Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu
- Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- Badanie trójmianu kwadratowego – zadania optymalizacyjne
- Równania kwadratowe
- Nierówności kwadratowe
- Zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi rozpoznać jednomian stopnia drugiego; – potrafi narysować wykres jednomianu stopnia drugiego i omówić jego własności; – potrafi odróżnić wzór funkcji kwadratowej od wzoru innej funkcji; – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej lub sprawdzić, że trójmian kwadratowy nie ma miejsc zerowych; – potrafi obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli na podstawie poznanego wzoru oraz na podstawie znajomości miejsc zerowych	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą; – potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych; – potrafi przekształcać wykresy funkcji kwadratowej (symetria względem osi *OX*, symetria względem osi *OY*, symetria względem punktu *O*(0, 0), przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego; – potrafi wyprowadzić wzory na współrzędne wierzchołka paraboli; – potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące funkcji kwadratowej, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.

funkcji kwadratowej; – potrafi naszkicować wykres dowolnej funkcji kwadratowej; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kwadratowej omówić jej własności; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej o zadanych własnościach; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej oraz iloczynowej; – potrafi sprawnie zamieniać jedną postać wzoru trójmianu kwadratowego na drugą (postać ogólna, kanoniczna, iloczynowa); – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w danym przedziale domkniętym; – potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi graficznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać proste zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem dotyczące własności funkcji kwadratowej; – potrafi przeanalizować zjawisko z życia codziennego, opisane wzorem (wykresem) funkcji kwadratowej.	wykres otrzymano w danym przekształceniu; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem, o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące własności funkcji kwadratowej; – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące własności funkcji kwadratowej.	

Przykładowe zadania		
Zadanie 1. Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej $f(x) = -2(x-3)(x+2)$, $x \in R$. a) Napisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej oraz ogólnej. b) Naszkicuj wykres funkcji f. c) Określ zbiór wartości funkcji f, przedziały monotoniczności oraz zbiór tych argumentów dla których funkcja f osiąga wartości niedodatnie. Zadanie 2. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 8$, $x \in R$. a) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f. b) Rozwiąż nierówność $f(x) > -8$. c) Wyznacz największą oraz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle 1; 3 \rangle$. Zadanie 3. Napisz wzór funkcji kwadratowej, jeśli wiadomo, że do jej wykresu należy punkt A(1, 3) i dla argumentu 2 funkcja osiąga swą największą wartość równą 4.	Zadanie 1. Firma zajmująca się wynajmem lokali ma do dyspozycji 180 pomieszczeń użytkowych. Wszystkie pomieszczenia są zajęte wówczas, gdy koszt wynajmu lokalu za jeden miesiąc wynosi 1200 zł. Firma oszacowała, że każda kolejna podwyżka czynszu o 40 zł, zmniejsza o 5 liczbę wynajmowanych pomieszczeń. a) Zapisz wzorem przychód firmy w zależności od liczby podwyżek czynszu, z których każda wyniosła 40 zł. b) Jaki miesięczny koszt wynajmu powinna ustalić firma, aby jej przychód był maksymalny? Ile wynosi maksymalny przychód? Zadanie 2. Narysuj wykres funkcji $y = 2x^2$, $x \in R$, a następnie przesuń go o wektor $\vec{u} = [-4, 2]$; otrzymany wykres przekształć przez symetrię względem punktu (0, 0). Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymałeś. Omów własności otrzymanej funkcji. Zadanie 3. Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 8, zaś suma kwadratów jej cyfr jest równa 30. Jeśli w liczbie zamienimy cyfry skrajne to otrzymana liczba	Zadanie 1. Wiadomo, że miejscami zerowymi funkcji $f(x) = 3x^2 + bx + 15$ są liczby całkowite. Oblicz b.

<u>Zadanie 4.</u> Liczbę osób zwiedzających wystawę n-tego dnia od momentu jej otwarcia opisuje wzór: $W(n) = -4n^2 + 48n - 24$, gdzie $n \in \{1, 2, ...,11\}$. Odpowiedz na pytania: a) W którym dniu wystawę odwiedziło najwięcej osób? b) Ile osób odwiedziło wystawę podczas jej trwania? <u>Zadanie 5.</u> Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx - 3$, $x \in R$. a) Wyznacz b tak, aby najmniejsza wartość funkcji wynosiła (–4). b) Wyznacz b tak, aby największy zbiór, w którym funkcja jest malejąca był równy przedziałowi $(-\infty; 6\rangle$. c) Wyznacz b tak, aby wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji należał do prostej o równaniu $y = 2x$.	będzie o 396 większa od początkowej. Znajdź tę liczbę. <u>Zadanie 4.</u> Wykaż, ze funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = ax^2 + (a + c)x + c$, gdzie a i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$, ma co najmniej jedno miejsce zerowe.	

4. Elementy geometrii analitycznej

Tematyka zajęć:

- Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka
- Równanie kierunkowe prostej. Równanie ogólne prostej
- Równoległość i prostopadłość prostych w układzie współrzędnych
- Odległość punktu od prostej
- Równanie okręgu
- Zastosowanie wiadomości o równaniu prostej i okręgu do rozwiązywania zadań

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczyć współrzędne wektora w prostokątnym układzie współrzędnych; – potrafi obliczyć długość wektora o danych współrzędnych; – zna cechy wektorów równych i przeciwnych; – zna twierdzenie o współrzędnych wektorów równych oraz współrzędnych wektorów przeciwnych i potrafi je stosować w prostych – zadaniach; – potrafi mnożyć wektor przez liczbę, dodawać i odejmować wektory; – zna wzór na współrzędne środka odcinka i potrafi go stosować w zadaniach; – posługuje się równaniem kierunkowym prostej; – posługuje się równaniem ogólnym prostej; – zna warunek równoległości prostych danych	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na współrzędne środka odcinka, gdy zna współrzędne końców tego odcinka; – potrafi napisać równanie okręgu opisanego na trójkącie, gdy dane ma współrzędne wierzchołków trójkąta; – potrafi rozwiązywać proste zadania z wykorzystaniem wiadomości o prostych, trójkątach, parabolach i okręgach; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące prostych i okręgów.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów w układzie współrzędnych.

równaniami kierunkowymi i stosuje go w prostych zadaniach; – zna warunek równoległości prostych danych równaniami ogólnymi i stosuje go w prostych zadaniach; – zna warunek prostopadłości prostych danych równaniami kierunkowymi i stosuje go w prostych zadaniach; – zna warunek prostopadłości prostych danych równaniami ogólnymi i stosuje go w prostych zadaniach; – zna wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi obliczyć odległość punktu od prostej; – rozpoznaje równanie okręgu w postaci zredukowanej $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ oraz w postaci kanonicznej $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; – potrafi sprowadzić równanie okręgu z postaci zredukowanej do postaci kanonicznej (i odwrotnie); – potrafi odczytać z równania okręgu współrzędne środka i promień okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu, gdy zna współrzędne środka i promień tego okręgu; – potrafi narysować w układzie współrzędnych okrąg na podstawie danego równania opisującego okrąg; – potrafi określić wzajemne położenie prostej o danym równaniu względem okręgu o danym równaniu (po wykonaniu stosownych obliczeń); – potrafi określić wzajemne położenie dwóch		

<table>
<tr><td>okręgów danych równaniami (na podstawie stosownych obliczeń);
– potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu lub stwierdzić, że prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Przykładowe zadania</td></tr>
<tr><td>Zadanie 1.
Odcinek o końcach $A(-4, -2)$ oraz B(2, 10) podzielono na cztery odcinki równej długości. Oblicz współrzędne punktów podziału.

Zadanie 2.
Dana jest prosta k: $3x - 4y + 7 = 0$ oraz punkt $A(-4, 1)$.
a) Napisz równanie ogólne prostej l, przechodzącej przez punkt A
– równoległej do prostej k;
– prostopadłej do prostej k.
b) Oblicz odległość punktu A od prostej k.

Zadanie 3.
W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj okrąg o danym równaniu:
$(x + 3)^2 + y^2 = 16$

Zadanie 4.
Wyznacz współrzędne środka i długość promienia okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$.</td><td>Zadanie 1.
Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli $A(1, 5)$, $B(8, -2)$, $C(9, 1)$.
Zadanie 2.
Prosta k: $y = x +1$ przecina parabolę o równaniu $y = -x^2 + 2x + 3$ w punktach A i B.
a) Oblicz współrzędne punktów A i B.
b) Napisz równanie okręgu o promieniu $r = \sqrt{5}$, którego średnicą jest odcinek AB.
c) Oblicz pole ΔABS, gdzie S jest środkiem okręgu wyznaczonego w punkcie b).

Zadanie 3.
Dana jest prosta k: $3x - 2y + 4 = 0$. Oblicz liczbę a, dla której punkt $A(2, a)$ leży w odległości 5 od prostej k.

Zadanie 4.
Wyznacz wartość parametru m tak, aby okręgi
o_1: $(x - m)^2 + (y + 1)^2 = 4$ oraz
o_2: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, były styczne zewnętrznie.</td><td>Zadanie 1.
Udowodnij, że równanie
$x^2 + y^2 - ax + 2by - 0{,}75a^2 + 2ab = 0$
opisuje okrąg dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz b takich, że $a \neq b$.
Podaj współrzędne środka i promień okręgu.</td></tr>
</table>

<u>Zadanie 5.</u> Oblicz współrzędne punktów wspólnych prostej k: $y = \frac{1}{2}x$ i okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x = 0$. <u>Zadanie 6</u>. Nie wykonując rysunku, określ: a) wzajemne położenie okręgów o równaniach: $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ oraz $x^2 + y^2 - 8y = 0$. b) wzajemne położenie prostej k: $y = 2x - 3$ względem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4$.		

5. Wielomiany

Tematyka zajęć:

- Wielomian jednej zmiennej rzeczywistej
- Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów
- Równość wielomianów
- Podzielność wielomianów
- Dzielenie wielomianów. Dzielenie wielomianów z resztą
- Pierwiastek wielomianu. Twierdzenie Bezouta
- Pierwiastek wielokrotny
- Rozkładanie wielomianów na czynniki
- Równania wielomianowe
- Zadania prowadzące do równań wielomianowych

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie jednomianu jednej zmiennej i potrafi określić stopień tego jednomianu; – potrafi wskazać jednomiany podobne; – potrafi rozpoznać wielomian jednej zmiennej rzeczywistej; – potrafi uporządkować wielomian (malejąco lub rosnąco); – potrafi określić stopień wielomianu jednej zmiennej;	Uczeń: – potrafi sprawnie dzielić wielomian przez wielomian; – potrafi korzystać z twierdzenia Bezouta przy rozkładaniu wielomianów na czynniki; – potrafi rozkładać wielomian na czynniki korzystając ze wzorów skróconego mnożenia: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; – potrafi rozwiązywać równania dwukwadratowe;	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie Bezouta; – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące wielomianów wymagające niekonwencjonalnych metod lub pomysłów, a także zadania o podwyższonym stopniu trudności z zastosowaniem poznanej wiedzy.

– potrafi obliczyć wartość wielomianu dla danej wartości zmiennej; – potrafi rozpoznać wielomiany równe; – potrafi rozwiązywać proste zadania, w których wykorzystuje się twierdzenie o równości wielomianów; – potrafi wykonać dodawanie, odejmowanie, mnożenie wielomianów; – potrafi wykonać dzielenie wielomianu przez dwumian; – potrafi sprawdzić czy podana liczba jest pierwiastkiem wielomianu; – potrafi określić krotność pierwiastka wielomianu danego w postaci iloczynowej; – zna twierdzenie Bezouta i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań; – potrafi obliczyć resztę z dzielenia wielomianu przez dwumian, nie wykonując dzielenia; – potrafi rozłożyć wielomian na czynniki poprzez wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias, zastosowanie wzorów skróconego mnożenia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ oraz zastosowanie metody grupowania wyrazów; – potrafi rozwiązywać równania wielomianowe, które wymagają umiejętności rozkładania wielomianów na czynniki wymienionych w poprzednim punkcie;	– zna i potrafi zastosować twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych; – zna twierdzenie o reszcie i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań; – potrafi wyznaczyć wielomian, który jest resztą z dzielenia wielomianu o danych własnościach przez wielomian stopnia drugiego; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań wielomianowych.	

– potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności wielomianów, w których występują parametry.		
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> Dane są wielomiany: $W(x) = 2x^3 - 3x + 1$ oraz $P(x) = 4x^2 - x + 5$. Wykonaj działania: a) $W(x) - 2P(x)$; b) $W(x) + [P(x)]^2$. <u>Zadanie 2.</u> a) Rozłóż wielomian $W(x) = -2x^3 + 8x - x^2 + 4$ na czynniki liniowe. b) Wymień pierwiastki tego wielomianu. <u>Zadanie 3.</u> Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + kx$. a) Wyznacz k tak, aby pierwiastkiem tego wielomianu była liczba 1. b) Dla wyznaczonej wartości k wyznacz pozostałe miejsca zerowe tego wielomianu. <u>Zadanie 4.</u> Dane są wielomiany $W(x) = (ax^2 + bx + 3)(x + 1)$ oraz $H(x) = 3x^3 + 7x^2 + 7x + 3$. Wyznacz *a* oraz *b* tak, aby wielomiany $W(x)$ oraz $H(x)$ były równe.	<u>Zadanie 1.</u> Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(x + 3)$ daje resztę 6, a przy dzieleniu przez $(x - 2)$ daje resztę 1. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = x^2 + x - 6$. <u>Zadanie 2.</u> Iloczyn trzech kolejnych liczb nieparzystych jest o 65 większy od różnicy kwadratów liczby największej i najmniejszej. Znajdź te liczby. <u>Zadanie 3.</u> Dla jakich m reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = m^2x^6 - 8x^3 + 5m$ przez dwumian $(x + 1)$ jest mniejsza od 2? <u>Zadanie 4.</u> a) Rozwiąż równanie $2x^4 - x^2 - 1 = 0$. b) Rozłóż na czynniki, możliwie najniższego stopnia, wielomian $W(x) = (x^3 + 8)(3x^3 - 81)$.	<u>Zadanie 1.</u> Rozłóż na czynniki wyrażenie $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$. <u>Zadanie 2.</u> Rozłóż na czynniki, możliwie najniższego stopnia, wielomian $W(x) = 9x^4 + 9$.

6. Funkcje wymierne

Tematyka zajęć:

- Określenie funkcji wymiernej
- Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych
- Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych
- Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych
- Proste równania wymierne
- Proste nierówności wymierne
- Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych
- Proporcjonalność odwrotna
- Funkcja homograficzna
- Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi na podstawie wzoru odróżnić funkcję wymierną od innej funkcji; – potrafi określić dziedzinę funkcji wymiernej (wyrażenia wymiernego); – potrafi napisać wzór funkcji wymiernej o zadanej dziedzinie; – potrafi wykonywać działania na ułamkach algebraicznych, takie jak: skracanie ułamków, rozszerzanie ułamków, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych;	Uczeń: – zna definicję funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$; – potrafi odróżnić funkcję homograficzną od innej funkcji wymiernej; – potrafi przekształcić wzór funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$ tak, by znany był wzór proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$ i współrzędne wektora przesunięcia	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące funkcji wymiernych.

– potrafi narysować wykres proporcjonalności odwrotnej $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \in R - \{0\}$, $x \in R - \{0\}$; – potrafi opisać własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \in R - \{0\}$, $x \in R - \{0\}$; – potrafi przesunąć wykres proporcjonalności odwrotnej o dany wektor i opisać własności otrzymanej funkcji; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności wymierne związane z proporcjonalnością odwrotną; – potrafi rozwiązywać proste zadania tekstowe z zastosowaniem wiadomości o proporcjonalności odwrotnej.	równoległego; – potrafi narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$; – potrafi opisać własności funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$, na podstawie jej wykresu; – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji homograficznej oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś *OY*; – potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji homograficznej; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności związane z funkcją homograficzną; – potrafi przekształcić wykres funkcji homograficznej w symetrii względem osi *OX*, symetrii względem osi *OY*, symetrii względem punktu (0, 0), w przesunięciu równoległym o dany wektor oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku tego przekształcenia; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych.	
Przykładowe zadania		
<u>Zadanie 1.</u> a) Wyznacz te wartości x, dla których podane ułamki algebraiczne mają sens liczbowy:	<u>Zadanie 1.</u> Wykres funkcji homograficznej o wzorze $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$ otrzymamy w wyniku przesunięcia	<u>Zadanie 1.</u> Z równania $\frac{1}{y-1} - \frac{1}{x+1} = 1$

$\frac{x+2}{x-3}$, $\frac{x^2+1}{x^2+2x+1}$, $\frac{x}{x^3-4x^2+2x-8}$ b) Podaj przykład funkcji wymiernej, której dziedziną jest zbiór R – {2, 3, 7}. Zadanie 2. a) Skróć ułamki algebraiczne: $\frac{2x^4-4x^2}{8x^2}$ oraz $\frac{(2x-1)(x+4)}{4x^2-1}$; podaj konieczne założenia. b) Wykonaj dodawanie oraz odejmowanie ułamków algebraicznych: $\frac{x}{x-2}+\frac{2x+3}{x+4}$ *oraz* $\frac{x-5}{2x+3}-\frac{3}{4x^2-9}$; podaj konieczne założenia. c) Wykonaj mnożenie oraz dzielenie wyrażeń wymiernych: $\frac{x^2-4}{2x^2-x}\cdot\frac{2x-1}{5x+10}$ oraz $\frac{x^2+4x+4}{x^2-16}:\frac{x+2}{2x-8}$; podaj konieczne założenia. Zadanie 3. Dana jest funkcja o wzorze $f(x)=\frac{2}{x}$, gdzie $x \in R-\{0\}$. a) Narysuj wykres funkcji f i na jego podstawie omów własności funkcji.	równoległego wykresu proporcjonalności odwrotnej $y=\frac{a}{x}$ o pewien wektor. a) Wyznacz wzór proporcjonalności odwrotnej oraz współrzędne wektora przesunięcia. b) Oblicz miejsce zerowe funkcji *f* oraz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji przecina oś *OY*. c) Naszkicuj wykres funkcji *f*. d) Podaj przedziały monotoniczności funkcji *f*. Zadanie 2. Funkcja $f(x)=\frac{2-x}{x+b}$ przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$. Wyznacz wartość współczynnika b. Następnie rozwiąż nierówność $f(x) \geq \frac{3x+8}{x+5}$. Zadanie 3. Dwie sekretarki wykonały pewną pracę w ciągu 12 godzin. Gdyby pierwsza wykonała sama połowę pracy, a następnie druga resztę, to zużyłaby na to 25 godzin. W ciągu ilu godzin każda z sekretarek, pracując oddzielnie, może wykonać tę pracę? Zadanie 4. Rozwiąż równanie i nierówność: a) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x}{x-2}=\frac{10}{x^2+x-6}$	wyznacz y jako funkcję zmiennej *x*. Następnie naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.

b) Rozwiąż nierówność $\frac{2}{x} \le 3$. <u>Zadanie 4.</u> Rozwiąż równanie $\frac{2x-3}{x+5} = \frac{x-5}{x+2}$. <u>Zadanie 5.</u> Promień dużego koła bicyklu ma długość 54 cm, a promień małego kółka – 20 cm. Oblicz, ile obrotów wykonało małe kółko, jeśli w tym samym czasie duże koło obróciło się 50 razy. Jaką odległość pokonał wtedy bicykl?	b) $\frac{x}{x^2+6x+9} \le \frac{1}{x+3}$.	