

# PLAN WYNIKOWY

(zakres podstawowy)

## klasa 3.

### Wstęp

Plan wynikowy kształcenia matematycznego jest dostosowany do programu nauczania matematyki w liceach i technikach – zakres podstawowy, autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab i Elżbiety Świdy, zamieszczonego na stronie internetowej [www.pazdro.com.pl](http://www.pazdro.com.pl) wiosną 2012 roku. Jest on przeznaczony dla nauczycieli oraz uczniów pracujących z podręcznikiem „Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Zakres podstawowy” – numer ewidencyjny w wykazie podręczników: 412/3/2012 oraz zbiorami zadań do matematyki, autorstwa Elżbiety Kurczab, Marcina Kurczaba i Elżbiety Świdy, wydanymi przez Oficynę Edukacyjną \* Krzysztof Pazdro.

Plan jest wykazem wiadomości i umiejętności, jakie powinien mieć uczeń ubiegający się o określone oceny na poszczególnych etapach edukacji w liceum lub w technikum.

Wymagania stawiane przed uczniem podzieliliśmy na trzy grupy:

- Wymagania podstawowe (zawierają wymagania konieczne);
- Wymagania dopełniające (zawierają wymagania rozszerzające);
- Wymagania wykraczające.

Wymagania wykraczające zawierają w sobie wymagania dopełniające, te zaś zawierają wymagania podstawowe.

Ocenę dopuszczającą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 40–60% wymagań podstawowych, zaś ocenę dostateczną – uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 60% wymagań podstawowych.

Ocenę dobrą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące do 75% wymagań dopełniających, zaś ocenę bardzo dobrą – uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 75% wymagań dopełniających.

Ocenę celującą powinien uzyskać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności zawarte w wymaganiach wykraczających.

# 1. Potęgi. Logarytmy. Funkcja wykładnicza

## Tematyka zajęć:

- Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie
- Funkcja wykładnicza i jej własności
- Proste równania wykładnicze
- Proste nierówności wykładnicze
- Zastosowanie funkcji wykładniczej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym
- Logarytm – powtórzenie wiadomości
- Proste równania logarytmiczne

| Wymagania podstawowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Wymagania dopełniające                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Wymagania wykraczające                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>– oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych;</li><li>– zna prawa działań na potęgach i potrafi je stosować w obliczeniach;</li><li>– zna definicję funkcji wykładniczej;</li><li>– potrafi odróżnić funkcję wykładniczą od innych funkcji;</li><li>– potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;</li><li>– potrafi opisać własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu;</li><li>– potrafi przekształcać wykresy funkcji wykładniczych (<math>S_{Ox}</math>, <math>S_{Oy}</math>, <math>S_{(0,0)}</math>, przesunięcie równoległe o dany wektor);</li><li>– potrafi rozwiązywać graficznie proste równania oraz nierówności z wykorzystaniem wykresu funkcji wykładniczej;</li></ul> | <p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>– potrafi zastosować proste równania i nierówności wykładnicze w rozwiązywaniu zadań dotyczących własności funkcji wykładniczych oraz innych zagadnień (np. ciągów);</li><li>– potrafi sprawnie przekształcać wyrażenia zawierające logarytmy, stosując poznane twierdzenia o logarytmach.</li></ul> | <p>Uczeń :</p> <ul style="list-style-type: none"><li>– rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności.</li></ul> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>– rozwiązuje proste równania wykładnicze sprowadzające się do równań liniowych i kwadratowych;</li> <li>– rozwiązuje proste nierówności wykładnicze sprowadzające się do nierówności liniowych i kwadratowych;</li> <li>– posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;</li> <li>– potrafi obliczyć logarytm liczby dodatniej;</li> <li>– zna i potrafi stosować wzory na: logarytm iloczynu, logarytm ilorazu, logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.</li> </ul> |  |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

### Przykładowe zadania

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>Zadanie 1.</u><br/>Naszkicuj wykres funkcji:<br/>a) <math>f(x) = 3^x</math>      b) <math>f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x</math><br/>i na podstawie wykresu omów własności funkcji <math>f</math>.</p> <p><u>Zadanie 2.</u><br/>Rozwiąż równanie i nierówność:<br/>a) <math>(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}</math></p> | <p><u>Zadanie 1.</u><br/>Rozwiąż równanie <math>\frac{3^{x+1}}{81} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{x}}</math></p> <p><u>Zadanie 2.</u><br/>Rozwiąż nierówność:<br/><math>0,7^{2+4+6+\dots+2x} \geq 0,7^{12}</math> i <math>x \in \mathbf{N}_+</math>.</p> <p><u>Zadanie 3.</u><br/>Funkcja <math>f(x) = 2^{x-4} + 1</math> oraz funkcja<br/><math>g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{m+x} - \frac{1}{4}</math> przyjmują dla pewnego</p> | <p><u>Zadanie 1.</u><br/>Wiedząc, że <math>\log_{14} 2 = a</math> i <math>\log_{14} 5 = b</math>, oblicz <math>\log_7 50</math>.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$$b) \left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+4} \leq \frac{4}{9}.$$

Zadanie 3.

Rozwiąż graficznie nierówność:  $2^{x-2} \leq 5 - x$ .

Zadanie 4.

Naukowcy zauważyli, że z powodu zmian środowiska naturalnego pewien gatunek zwierząt liczący obecnie 1000 sztuk może wyginąć. Oszacowali, że po  $t$  latach gatunek ten będzie liczył (w przybliżeniu)  $N(t) = 1000 \cdot (0,9)^t$  sztuk. Oblicz, ile osobników tego gatunku będzie po 5 latach.

Zadanie 5.

Oblicz:

a)  $\log_2 16$ , b)  $\log_{\pi} 1$ , c)  $\log_{\frac{1}{7}} 49$ , d)  $\log 10^{12}$ .

Zadanie 6.

Oblicz:

a)  $\log_2 \frac{\sqrt[3]{4}}{8}$ , b)  $\log_4 2 + \log_4 32$ ,  
b)  $\log_{\frac{1}{3}} 324 - 2\log_{\frac{1}{3}} 6$ .

Zadanie 7.

Oblicz  $x$ , jeśli :

a)  $\log_x 81 = 4$ ; b)  $\log_2 x = -\frac{2}{3}$ .

argumentu tę samą wartość równą 1,25. Oblicz  $m$ .

Zadanie 4.

Dwie liczby rzeczywiste  $p$  i  $q$  spełniają równania:

$p + q = \log_6 3$  oraz  $p - q = \log_6 12$ . Oblicz  $p$  i  $q$ .

Zadanie 5.

Liczby  $2$ ,  $2^{x-1} + 4$ ,  $2^{x-2} + 12$  są, w podanej kolejności, trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 6.

Oblicz wartość wyrażenia  $16^{\log_2 \sqrt[4]{2} + \log_4 3}$ .

## 2. Elementy geometrii analitycznej

### Tematyka zajęć:

- Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka
- Równanie kierunkowe prostej. Równanie ogólne prostej
- Równoległość i prostopadłość prostych w układzie współrzędnych
- Odległość punktu od prostej
- Zastosowanie wiadomości o równaniu prostej do rozwiązywania zadań

| Wymagania podstawowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Wymagania dopełniające                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Wymagania wykraczające |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| Uczeń: <ul style="list-style-type: none"><li>– potrafi obliczyć współrzędne wektora, gdy dane są współrzędne początku i końca tego wektora;</li><li>– potrafi wyznaczyć na podstawie współrzędnych wektora i współrzędnych końca (początku) wektora, współrzędne początku (końca) tego wektora;</li><li>– potrafi obliczyć długość wektora (długość odcinka);</li><li>– wie, jakie wektory są równe, a jakie przeciwne;</li><li>– potrafi obliczyć współrzędne wektora będącego sumą (różnicą) dwóch danych wektorów;</li><li>– potrafi pomnożyć wektor przez liczbę;</li><li>– potrafi obliczyć współrzędne środka odcinka o danych końcach (wyznaczyć współrzędne jednego z końców odcinka, mając dane</li></ul> | Uczeń: <ul style="list-style-type: none"><li>– potrafi wyznaczyć obraz figury geometrycznej (punktu, odcinka, trójkąta, prostej itp.) w symetrii osiowej względem dowolnej prostej oraz w symetrii środkowej względem dowolnego punktu;</li><li>– potrafi rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej, o średnim stopniu trudności, w których wykorzystuje wiedzę o wektorach i prostych;</li><li>– rozwiązuje zadania, w których występują parametry.</li></ul> |                        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <p>współrzędne środka odcinka i współrzędne drugiego końca);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi obliczyć współrzędne środka ciężkości trójkąta;</li> <li>– zna pojęcia: równanie kierunkowe prostej oraz równanie ogólne prostej;</li> <li>– potrafi napisać równanie kierunkowe prostej, znając kąt nachylenia tej prostej do osi <math>OX</math> oraz współrzędne punktu należącego do tej prostej;</li> <li>– potrafi na podstawie równania kierunkowego prostej podać miarę kąta nachylenia tej prostej do osi <math>OX</math>;</li> <li>– potrafi napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez dwa dane punkty;</li> <li>– potrafi przekształcić równanie prostej danej w postaci kierunkowej do postaci ogólnej (i odwrotnie – o ile takie równanie istnieje);</li> <li>– zna warunek na równoległość i prostopadłość prostych danych równaniami ogólnymi (kierunkowymi);</li> <li>– potrafi napisać równanie prostej równoległej (prostopadłej) do danej prostej przechodzącej przez dany punkt;</li> <li>– oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;</li> <li>– zna wzór na odległość punktu od prostej;</li> <li>– potrafi obliczyć odległość danego punktu od danej prostej;</li> <li>– znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, odcinka, trójkąta, prostej itp.)</li> </ul> |  |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

|                                                                                                                                                                                                      |  |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <p>w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych;<br/> – potrafi rozwiązywać proste zadania z zastosowaniem poznanych wzorów.</p> |  |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

### Przykładowe zadania

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p><u>Zadanie 1.</u><br/>Dane są punkty <math>A(4, 7)</math> oraz <math>B(-4, -1)</math>. Oblicz:</p> <p>a) współrzędne wektora <math>\vec{AB}</math> ;<br/>b) długość odcinka <math>AB</math>;<br/>c) współrzędne środka odcinka <math>AB</math>.</p> <p><u>Zadanie 2.</u><br/>Dane są punkty:<br/><math>A(4, 8)</math>, <math>B(3, -1)</math>, <math>C(-1, 9)</math> oraz <math>D(2, 15)</math>.<br/>a) Napisz równanie kierunkowe prostej <math>AB</math> oraz równanie ogólne prostej <math>CD</math>;<br/>b) Czy proste <math>AB</math> oraz <math>CD</math> są równoległe?<br/>Odpowiedź uzasadnij.</p> <p><u>Zadanie 3.</u><br/>Trójkąt <math>ABC</math>, gdzie <math>A(-4, 6)</math> i <math>B(8, -2)</math>, jest równoramienny, w którym <math> AC  =  BC </math>.<br/>Napisz równanie ogólne prostej, w której zawiera się wysokość trójkąta <math>ABC</math>, poprowadzona z wierzchołka <math>C</math>.</p> <p><u>Zadanie 4.</u><br/>Oblicz odległość między prostymi <math>k: x + y - 8 = 0</math> oraz <math>l: y = -x + 7</math>.</p> <p><u>Zadanie 5.</u><br/>Odcinek <math>AB</math>, gdzie <math>A(-2, -2)</math> i <math>B(6, 3)</math></p> | <p><u>Zadanie 1.</u><br/>Wyznacz wartość parametru <math>p</math>, dla której proste <math>k: x - py - 2p = 0</math> oraz <math>l: -3x + (2 - p)y - 6 = 0</math> są<br/>a) równoległe;<br/>b) prostopadłe.</p> <p><u>Zadanie 2.</u><br/>Wyznacz współrzędne punktu <math>P'</math>, który jest obrazem punktu <math>P(3, 5)</math>, w symetrii osiowej względem prostej <math>k: x + y - 4 = 0</math>.</p> <p><u>Zadanie 3.</u><br/>Dane są punkty <math>A(-5, 3)</math> i <math>B(1, -3)</math>. Wyznacz współrzędne punktu <math>C</math> leżącego na osi <math>OY</math>, tak aby pole trójkąta <math>ABC</math> było równe 36.</p> <p><u>Zadanie 4.</u><br/>W układzie współrzędnych dane są cztery punkty:<br/><math>A(-5, 2)</math>, <math>B(3, -4)</math>, <math>C(5, 1)</math>, <math>D(1, 4)</math>.<br/>a) Wykaż, że czworokąt <math>ABCD</math> jest trapezem;<br/>b) Oblicz pole trapezu <math>ABCD</math>.</p> |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

|                                                                                                                                       |  |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| przekształcono przez symetrię osiową względem prostej $k: x = 0$ i otrzymano odcinek $A'B'$ . Podaj współrzędne punktów $A'$ i $B'$ . |  |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

### 3. Elementy kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa

#### Tematyka zajęć:

- Reguła mnożenia
- Reguła dodawania
- Doświadczenie losowe
- Zdarzenia. Działania na zdarzeniach
- Obliczanie prawdopodobieństwa

| Wymagania podstawowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Wymagania dopełniające                                                                                                                                                                                                                        | Wymagania wykraczające                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych;</li> <li>– stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;</li> <li>– zna terminy: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, zdarzenia wykluczające się;</li> <li>– zna twierdzenie o prawdopodobieństwie klasycznym;</li> <li>– zna własności prawdopodobieństwa i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań;</li> <li>– umie określić (skończoną) przestrzeń zdarzeń</li> </ul> | <p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– rozwiązuje zadania z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa o średnim stopniu trudności;</li> <li>– oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia doświadczenia wieloetapowego.</li> </ul> | <p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności.</li> </ul> |

|                                                                                                                                                                                                                                                  |  |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <p>elementarnych danego doświadczenia losowego i obliczyć jej moc;</p> <p>– umie określić jakie zdarzenia elementarne sprzyjają danemu zdarzeniu;</p> <p>– zna i umie stosować w prostych sytuacjach klasyczną definicję prawdopodobieństwa.</p> |  |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

### Przykładowe zadania

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |           |          |           |          |         |   |   |   |           |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|----------|-----------|----------|---------|---|---|---|-----------|---|---|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>Zadanie 1.</u></p> <p>Z cyfr należących do zbioru <math>\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}</math> tworzymy liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach . Ile wśród nich jest :</p> <p>a) liczb parzystych</p> <p>b) liczb nieparzystych</p> <p>c) liczb podzielnych przez 5?</p> <p><u>Zadanie 2.</u></p> <p>Z talii składającej się z 52 kart losujemy jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania karty , która jest kierem lub damą?</p> <p><u>Zadanie 3.</u></p> <p>Ze zbioru wszystkich liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana liczba przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.</p> <p><u>Zadanie 4.</u></p> <p>Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie</p> | <p><u>Zadanie 1.</u></p> <p>W grupie 20 studentów każdy uprawia jeden sport. W poniższej tabeli przedstawiona jest informacja o uprawianych przez studentów rodzajach sportu, z uwzględnieniem płci studentów.</p> <table><tr><td></td><td>Tenis</td><td>Siatkówka</td><td>Pływanie</td></tr><tr><td>Kobiety</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>Mężczyźni</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td></tr></table> <p>Wybieramy z grupy jednego studenta. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:</p> <p>a) wybrany student uprawia pływanie;</p> <p>b) wybrany student jest mężczyzną lub gra w siatkówkę;</p> <p>c) wybrany student nie gra w tenisa.</p> <p><u>Zadanie 2</u></p> <p>W loterii jest 15 losów: dwa losy dają wygraną po 10 zł oraz trzy losy dają wygraną po 5 zł, zaś pozostałe losy są przegrywające. Jakiej jest</p> |           | Tenis    | Siatkówka | Pływanie | Kobiety | 4 | 2 | 3 | Mężczyźni | 5 | 4 | 2 | <p><u>Zadanie 1.</u></p> <p>Ze zbioru <math>\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}</math> losujemy kolejno bez zwracania trzy liczby <math>a, b, c</math> i tworzymy funkcję określoną wzorem <math>f(x) = ax^2 + bx + c</math>. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymana funkcja:</p> <p>a) ma wykres symetryczny względem osi <math>OY</math>;</p> <p>b) jest malejąca w zbiorze <math>R</math>.</p> |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Tenis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Siatkówka | Pływanie |           |          |         |   |   |   |           |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Kobiety                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 2         | 3        |           |          |         |   |   |   |           |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Mężczyźni                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 4         | 2        |           |          |         |   |   |   |           |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

|                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p>kostką sześcienną do gry.<br/>Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w pierwszym i drugim rzucie otrzymamy liczbę oczek będącą liczbą pierwszą.</p> | <p>prawdopodobieństwo, że kupując kolejno dwa losy, wygramy 10 zł?</p> <p><u>Zadanie 3.</u><br/>W pudełku znajdują się 3 kule białe i 7 kul zielonych. Losujemy jedną kulę z pudełka, a następnie z pozostałych kul losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana za drugim razem kula jest zielona.</p> |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

## 4. Elementy statystyki opisowej

### Tematyka zajęć:

- Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej
- Średnia z próby
- Mediana z próby i moda z próby
- Wariancja i odchylenie standardowe

| Wymagania podstawowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Wymagania dopełniające                                                                                                                           | Wymagania wykraczające |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi odczytywać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów;</li> <li>– potrafi przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów;</li> <li>– potrafi obliczyć średnią arytmetyczną i średnią ważoną z próby;</li> <li>– potrafi obliczyć medianę z próby;</li> <li>– potrafi wskazać modę z próby;</li> </ul> | <p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi rozwiązywać proste zadania teoretyczne dotyczące pojęć statystycznych.</li> </ul> |                        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi obliczyć wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych;</li> <li>– potrafi na podstawie obliczonych wielkości przeprowadzić analizę przedstawionych danych;</li> <li>– potrafi określać zależności między odczytanymi danymi.</li> </ul> |  |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

### Przykładowe zadania

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |               |   |    |   |   |   |   |             |    |   |    |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---|----|---|---|---|---|-------------|----|---|----|---|---|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p><u>Zadanie 1.</u></p> <p>Pięćdziesiąt osób zdawało egzamin z przepisów ruchu drogowego. Liczba popełnionych przez nie błędów przedstawiona jest w poniższej tabeli:</p> <table><tr><td>Liczba błędów</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>Liczba osób</td><td>11</td><td>8</td><td>14</td><td>7</td><td>6</td><td>4</td></tr></table> <p>a) Oblicz średnią liczbę błędów popełnionych przez zdającego.</p> <p>b) Ile procent zdających zdało egzamin, jeśli do tego można było popełnić co najwyżej dwa błędy?</p> <p>c) Przedstaw dane na diagramie kolumnowym i zaznacz na nim średnią obliczoną w punkcie a).</p> <p><u>Zadanie 2.</u></p> <p>Producent czekolady deklaruje, że tabliczka ma wagę <math>150 \text{ g} \pm 2 \text{ g}</math>. Dla zbadania jakości pewnej partii czekolady organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek czekolady</p> | Liczba błędów | 0 | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | Liczba osób | 11 | 8 | 14 | 7 | 6 | 4 | <p><u>Zadanie 1.</u></p> <p>Suma trzech liczb <math>x</math>, <math>y</math> oraz <math>z</math> wynosi 6, a ich wariancja jest równa 21. Oblicz sumę kwadratów tych liczb.</p> <p><u>Zadanie 2.</u></p> <p>Zestaw trzech liczb <math>a</math>, <math>b</math> i <math>c</math> ma średnią arytmetyczną <math>\overline{x_1}</math> i odchylenie standardowe od średniej równe <math>\sigma_1</math>.</p> <p>Zestaw trzech liczb <math>a + 3</math>, <math>b + 3</math> i <math>c + 3</math> ma średnią arytmetyczną <math>\overline{x_2}</math> i odchylenie standardowe <math>\sigma_2</math>.</p> <p>Wyznacz związek pomiędzy średnimi arytmetycznymi i odchyleniami standardowymi obu zestawów danych.</p> |  |
| Liczba błędów                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0             | 1 | 2  | 3 | 4 | 5 |   |             |    |   |    |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
| Liczba osób                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 11            | 8 | 14 | 7 | 6 | 4 |   |             |    |   |    |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <p>z tej partii i otrzymała następującą ich wagę (w gramach):</p> <p>150,4 148,9 150,1 152,8 146,6 154,3 150,8 151,1 150,6 149,5</p> <p>Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady i odchylenie standardowe w badanej próbie.</p> <p>Zastanów się, czy organizacja konsumencka winna zwrócić się do producenta z reklamacją dotyczącą tej partii tabliczek czekolady.</p> |  |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

## 5. Geometria przestrzenna

### Tematyka zajęć:

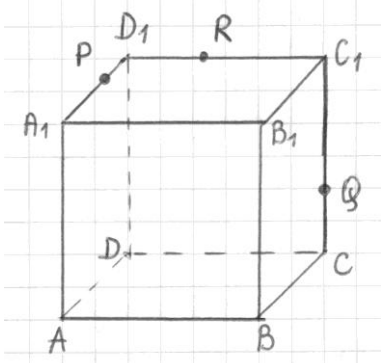
- Płaszczyzny i proste w przestrzeni
- Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę
- Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni
- Rzut prostokątny na płaszczyznę
- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych
- Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny
- Graniastopy
- Ostrośły
- Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu
- Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów
- Przekroje wybranych wielościanów
- Bryły obrotowe. Pole powierzchni brył obrotowych
- Objętość brył obrotowych

| Wymagania podstawowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Wymagania dopełniające                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Wymagania wykraczające                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi określić położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni;</li> <li>– potrafi określić położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni;</li> <li>– potrafi określić położenie dwóch prostych w przestrzeni;</li> <li>– potrafi rysować figury płaskie w rzucie równoległym na płaszczyznę;</li> <li>– umie scharakteryzować prostopadłość prostej i płaszczyzny;</li> <li>– umie scharakteryzować prostopadłość dwóch płaszczyzn;</li> <li>– zna i umie stosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych;</li> <li>– rozumie pojęcie kąta między prostą i płaszczyzną;</li> <li>– rozumie pojęcie kąta dwuściennego, poprawnie posługuje się terminem „kąt liniowy kąta dwuściennego”;</li> <li>– zna określenie graniastosłupa; umie wskazać: podstawy, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość graniastosłupa;</li> <li>– zna podział graniastosłupów;</li> <li>– umie narysować siatki graniastosłupów prostych;</li> <li>– zna określenie ostrosłupa; umie wskazać: podstawę, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość ostrosłupa;</li> <li>– zna podział ostrosłupów;</li> </ul> | <p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;</li> <li>– zna i umie stosować twierdzenia charakteryzujące ostrosłup prosty;</li> <li>– potrafi rozwiązywać zadania geometryczne dotyczące brył o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń.</li> </ul> | <p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– potrafi skonstruować przekrój wielościanu płaszczyzną i udowodnić poprawność konstrukcji;</li> <li>– potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne dotyczące brył, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń.</li> </ul> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |  |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>– umie narysować siatki ostrosłupów prostych;</li> <li>– rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;</li> <li>– rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów;</li> <li>– rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;</li> <li>– zna określenie walca; umie wskazać: podstawy, powierzchnię boczną, tworzącą, oś obrotu walca;</li> <li>– rozumie określenie przekrój osiowy walca;</li> <li>– zna określenie stożka; umie wskazać: podstawę, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś obrotu, wierzchołek stożka;</li> <li>– rozumie określenie przekrój osiowy stożka</li> <li>– zna określenie kuli;</li> <li>– rozpoznaje w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą); oblicza miary tych kątów;</li> <li>– umie obliczać objętość i pole powierzchni poznanych graniastosłupów;</li> <li>– umie obliczać objętość i pole powierzchni poznanych ostrosłupów prawidłowych;</li> <li>– umie obliczać objętość i pole powierzchni brył obrotowych (stożka, kuli, walca);</li> <li>– potrafi rozwiązywać proste zadania</li> </ul> |  |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

|                                                                                                    |  |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| geometryczne dotyczące brył, w tym z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych wcześniej twierdzeń. |  |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

### Przykładowe zadania

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>Zadanie 1.</u><br/>W graniastopie prawidłowym czworokątnym suma długości jego krawędzi jest równa 68 cm, a pole powierzchni całkowitej <math>190 \text{ cm}^2</math>. Oblicz długość krawędzi graniastopu.</p> <p><u>Zadanie 2.</u><br/>Podstawą ostrosłupa <math>ABCS</math> jest trójkąt <math>ABC</math>. Krawędź <math>AS</math> jest wysokością tego ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa <math>ABCS</math>, wiedząc, że <math> AS  = 8</math>, <math> BS  =  CS  = 10</math> oraz <math> BC  = 4</math>.</p> <p><u>Zadanie 3.</u><br/>W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o wysokości <math>2\sqrt{3} \text{ cm}</math>, ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem <math>\alpha = \frac{\pi}{3}</math>. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa.</p> <p><u>Zadanie 4.</u><br/>Znajdź pole powierzchni całkowitej walca, którego pole powierzchni bocznej jest równe <math>P_b</math> i którego przekrojem osiowym jest kwadrat.</p> | <p><u>Zadanie 1.</u><br/>Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Wszystkie krawędzie boczne mają długość 10 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.</p> <p><u>Zadanie 2.</u><br/>Sześcian o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem:<br/>a) <math>45^\circ</math><br/>b) <math>60^\circ</math>.<br/>Oblicz pole otrzymanego przekroju.</p> <p><u>Zadanie 3.</u><br/>Krawędź podstawy graniastopu prawidłowego trójkątnego ma 6 cm długości, a wysokość graniastopu jest równa <math>3\sqrt{2} \text{ cm}</math>. Wyznacz miarę kąta między przekątną ściany bocznej a płaszczyzną sąsiedniej ściany bocznej.</p> | <p><u>Zadanie 1.</u><br/>Trójkąt równoramienny o obwodzie długości <math>k</math> i kącie przy wierzchołku <math>\alpha</math>, obraca się wokół podstawy. Oblicz objętość powstałej bryły.</p> <p><u>Zadanie 2.</u><br/>Dany jest sześcian <math>ABCA_1B_1C_1D_1</math>. Punkty <math>P, Q, R</math>, leżą odpowiednio na krawędziach <math>A_1D_1, CC_1, D_1C_1</math> (zobacz rysunek).</p>  <p>Skonstruuj przekrój sześcianu płaszczyzną <math>PQR</math>. Uzasadnij konstrukcję.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|